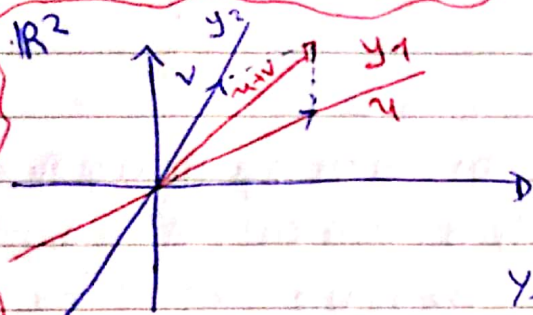


12/5/21

Φύλλο #8

(αλγεβρικό
↓
αξίωμα)

1-4) V^n Ευκλείδειος χώρος $Y_1, Y_2 \leq V$ $Y_1 + Y_2 = \{u+v \mid u \in Y_1, v \in Y_2\} \leq V$
 $Y_1, Y_2 \leq Y_1 + Y_2$, $Y_1 \cup Y_2 \neq H$ ένωση υποχώρων είναι υπόχωρος?



Οχι

Το $u+v$ ανήκει στην $Y_1 \cup Y_2$? οχι, ανήκειστο $Y_1 + Y_2 : u+v \notin Y_1 \cup Y_2$ $u+v \in Y_1 + Y_2$ $Y_1 \cap Y_2 \leq V$ Η τομή είναι πάντα υπόχωρος του V

• Τι είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα? $Y_1^\perp = \{u \in V : \langle u, v \rangle = 0 \ \forall v \in Y_1\}$

Θέλω να δώ $(Y_1 + Y_2)^\perp = Y_1^\perp \cap Y_2^\perp$ και $(Y_1 \cap Y_2)^\perp = Y_1^\perp + Y_2^\perp$

Παίρνω ένα $u \in Y_1^\perp \cap Y_2^\perp \Leftrightarrow u \in Y_1^\perp$ και $u \in Y_2^\perp \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$

$\forall v \in Y_1$ και $\langle u, w \rangle = 0 \ \forall w \in Y_2$

$\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = 0 \ \forall v \in Y_1$ και $\forall w \in Y_2 \Leftrightarrow \langle u, v+w \rangle = 0$

$\forall v \in Y_1$ και $\forall w \in Y_2$

$\forall v+w \in Y_1 + Y_2 \Leftrightarrow u \in (Y_1 + Y_2)^\perp$

Είναι το 2^ο μέρος
και των 2 σχέσεων

Δηλ το u πράζεται ως άθροισμα 2 διανυσμάτων

Παίρνω ένα $u \in Y_1^\perp + Y_2^\perp \Leftrightarrow u = u_1 + u_2$ με $u_1 \in Y_1^\perp, u_2 \in Y_2^\perp$

$u_1 \in Y_1^\perp \Leftrightarrow \langle u_1, v \rangle = 0 \ \forall v \in Y_1$

(1)

$u_2 \in Y_2^\perp \Leftrightarrow \langle u_2, w \rangle = 0 \ \forall w \in Y_2$

(2)

Θέλουμε $u \in (Y_1 \cap Y_2)^\perp$ [Διότι τότε θα έχουμε ότι:
 $(Y_1^\perp + Y_2^\perp) \subseteq (Y_1 \cap Y_2)^\perp$]

Έστω $v \in (Y_1 \cap Y_2)$. Άρα $v \in Y_1$ και $v \in Y_2$. Από ①, ②
 έχουμε $\langle u, v \rangle = 0$ ($\Leftrightarrow u \perp v$) $\Rightarrow u \in (Y_1 \cap Y_2)^\perp$

Θέλουμε $(Y_1 \cap Y_2)^\perp \subseteq Y_1^\perp + Y_2^\perp$. Έστω $w \in (Y_1 \cap Y_2)^\perp$ $\Leftrightarrow \langle w, u \rangle = 0$
 $\forall u \in Y_1 \cap Y_2$ $u \in Y_1, u \in Y_2$

$\langle w, u \rangle = 0, u \in Y_1 \cap Y_2$. Θέλουμε $w \in Y_1^\perp + Y_2^\perp$ $\langle w, v_1 + v_2 \rangle$
 $v_1 \in Y_1$ και $v_2 \in Y_2$ και $w \in (Y_1 \cap Y_2)^\perp$

Άρα $(Y_1 \cap Y_2)^\perp \subseteq Y_1^\perp + Y_2^\perp$

2^η) $A = A^t \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ (*)

πραγματικός συμμετρικός 3×3 π.ο. οι ιδιοτιμές του είναι πραγμ. αριθμοί
 και ικανοποιούν το χαρακτηριστικό πολ. Δίνεται $A^3 = I$,
 δηλ. ο A ικανοποιεί το τρίτοβάθμιο πολ. $x^3 = 1$ ($\Leftrightarrow$
 $x^3 - 1 = 0$). Άλλοι και $\chi_A(\lambda)$ έχει βαθμό 3 (*), δηλ.
 το $x^3 - 1 = 0$ είναι το χαρακτηριστικό του πολ.ο.

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

↑ έχει μιγαδικές ρίζες. Επειδή ο $A = A^t$
 (πραγμ. συμ.) έχει ιδιοτιμή το 1 (η μόνη πραγματική)
 και διαγωνοποιείται $A = P \Lambda P^t$ $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Δηλ. } A = P \underset{=I}{\underset{\uparrow}{I}} P^t = P P^t = I$$

$$3) A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & e^{i\gamma} \sin \alpha \\ e^{i\gamma} \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad e^{i\gamma} = \cos \gamma + i \sin \gamma$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & (\cos \gamma + i \sin \gamma) \sin \alpha \\ (\cos \gamma + i \sin \gamma) \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{Δείνω να } A \text{ ορθομοναδιαίος}$$

$$A: \text{ορθομοναδιαίος} \Rightarrow A \cdot A^t = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^t$$

$$A: \text{ορθομοναδιαίος} \Leftrightarrow A \cdot \bar{A}^t = I$$

↑
ο συζυγής

$$A \cdot \bar{A}^t = \begin{pmatrix} \cos \alpha & (\cos \gamma + i \sin \gamma) \sin \alpha \\ (\cos \gamma + i \sin \gamma) \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & (\cos \gamma - i \sin \gamma) \sin \alpha \\ (\cos \gamma - i \sin \gamma) \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = \dots$$

$$= I$$

$$4) T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T(x, y, z) = (x+y+z, x-y, x-z), \quad T^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

$$\langle T(x, y, z), (a, b, d) \rangle = \langle (x+y+z, x-y, x-z), (a, b, d) \rangle =$$

$$= ax + ay + az + bx - by + xz - dz$$

$$= \langle (x, y, z), (a+b+d, a-b, a-d) \rangle \quad (*) \quad \text{Άρα } T^*(a, b, d) = (a+b+d, a-b, a-d)$$

Έχουμε το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και ο πίνακας της T ως προς τα αυτά τα βάση είναι ο:

$$T_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t$$

Συμμετρικός, διότι αυτό ο πίνακας του προσαρτημένου είναι ο (*)

6) $A = P B P^t$ ομογενής ομορφή ~~$\Rightarrow \text{tr}(A^t A) = \text{tr}(A^t A)$~~
 $\boxed{\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)}$

$$A^t = (P B P^t)^t = (P^t)^t B^t P^t = P B^t P^t \quad A^t A = P B^t P^t P B P^t = P B^t B P^t$$

$$\text{tr}(A^t A) = \text{tr}(P B^t B P^t) = \text{tr}(B^t B P^t P) = \text{tr}(B^t B)$$

$$A^t A = (c_{ij}) \quad c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} a_{tj} = \sum_{t=1}^n a_{ti} a_{tj}$$

$$A = (a_{ij}) \quad A^t = (a'_{ij}) \quad a'_{ij} = a_{ji} \quad \text{tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n a_{ti} a_{ti} = \sum_{i,t} a_{ti}^2$$

5) $T: V \rightarrow V$ και $T^*: V \rightarrow V \quad V \xrightarrow{T} V \xrightarrow{T^*} V$

$$\ker T = \ker T^* T$$

$$u \in \ker T \Rightarrow T(u) = \vec{0} \Rightarrow T^* T(u) = T^*(\vec{0}) = \vec{0} \Rightarrow u \in \ker T^* T \Rightarrow \ker T \subseteq \ker T^* T$$

$$\ker T = \{u \in V: T(u) = \vec{0}\}$$

$$\text{Εστω } u \in \ker T^* T \Rightarrow T^* T(u) = \vec{0} \Rightarrow \langle u, T^* T(u) \rangle = \langle u, \vec{0} \rangle = 0 \Rightarrow \langle T(u), T(u) \rangle = 0 \Rightarrow T(u) = \vec{0} \Rightarrow u \in \ker T \Rightarrow \ker T^* T \subseteq \ker T$$

$$\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp. \text{ Εστω } u \in \ker T \Rightarrow \langle T(u), u \rangle = \langle \vec{0}, u \rangle = 0 \Rightarrow \langle T(u), u \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, T^*(u) \rangle = 0$$

$$T^*(v) \text{ οποιοσδήποτε } v \in \text{Im } T^* \Rightarrow u \in (\text{Im } T^*)^\perp \Rightarrow \ker T \subseteq (\text{Im } T^*)^\perp$$

$$\text{Εστω } u \in (\text{Im } T^*)^\perp \Rightarrow \langle u, T^*(v) \rangle = 0 \Rightarrow \langle T(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow T(u) = \vec{0} \Rightarrow u \in \ker T$$

Δω. $(\text{Im } T^*)^\perp \subseteq \ker T$. Τελικά $\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp$
Ομοίως και το άλλο

7) $A^t A$ είναι μ -αρνητικά ορισμένος. $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$ συμμετρικός. $\forall u \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\langle Au, Au \rangle \geq 0 \Rightarrow$
 $\langle u, u \rangle \geq 0$

$\Rightarrow \langle u, A^t A u \rangle \geq 0 \stackrel{\text{συμ}}{\Rightarrow} A^t A$ μ -αρνητικά ορισμένος
+ Ορισ A : αντιστρέφειμος

Ο πίνακας $A^t A + I$ είναι αντιστρέφειμος $\Rightarrow \text{rank} = n$
 $\Rightarrow \det \neq 0$
 φινόμενο στοιχ. πινάκων
 όταν όλες οι ιδιοτιμές
 του είναι $\neq 0$

$A^t A$ συμ. , I συμ. $\Rightarrow A^t A + I$ συμ. $\Rightarrow$ πραγμ. ιδιοτιμές. Αρκεί να
 είναι θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές > 0

$u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0$ και + $\langle u, A^t A u \rangle \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle u, u \rangle + \langle u, A^t A u \rangle > 0 \Rightarrow \langle u, u + A^t A u \rangle > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle u, (I + A^t A)u \rangle > 0 \Rightarrow \langle u, (A^t A + I)u \rangle > 0 \quad \forall u \neq 0$

$\Rightarrow$ Ο πίνακας $I + A^t A$ είναι θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ έχει

θετ. ιδιοτ. $\Rightarrow$ αντιστρέφεται

ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΕΝΟΣ - ΣΥΖΥΓΗΣ ΠΙΝΑΚΑΣ (ADJOINT)

V^n Ευκλ. χώρος $T: V \rightarrow V$ ευδ. και ορίζεται ο προσαρτημένος
 $T^*: V \rightarrow V$ με $\langle Tu, v \rangle = \langle u, T^*v \rangle \quad \forall u, v \in V$

Πρόταση: Ισχύει ότι $\ker T^* = (\text{Im } T)^\perp$ (... αντιστρέφει)

Πρόταση: Αν ο $T^*: V^n \rightarrow V^n$ είναι ο προσαρτημένος του $T: V^n \rightarrow V^n$
 τότε ο πίνακας της T^* ως προς κάποια ορθοκανονική βάση
 του V είναι ο ανάστροφος του πίνακα της T ως προς αυτή τη βάση.

Αν k είναι μια ορθοκανονική βάση, τότε: $T^{*k} = (T^k)^t$

Απόδ:

Έστω $k = (v_1, \dots, v_n)$ μια ορθοκ. βάση του Ευκλ. χώρου V^n

Ισχύει ότι $\langle T(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, T^*(v_j) \rangle$ $\oplus$

Έστω $T^{*k} = (b_{ij})$ και $T^k = (a_{ij})$ οι αντίστοιχοι πίνακες

στο αυτ. π. βάση

$$T(v_i) = \sum_{t=1}^n a_{ti} v_t \quad \text{και} \quad T^*(v_j) = \sum_{k=1}^n b_{kj} v_k$$

$$\begin{aligned} \oplus \quad \langle \sum_{t=1}^n a_{ti} v_t, v_j \rangle &= \langle v_i, \sum_{k=1}^n b_{kj} v_k \rangle \Rightarrow \sum_{t=1}^n a_{ti} \underbrace{\langle v_t, v_j \rangle}_{\text{ορθοκανονική}} = \\ &= \sum_{k=1}^n b_{kj} \underbrace{\langle v_i, v_k \rangle}_{\text{ορθοκανονική}} \Rightarrow a_{ji} = b_{ij}, \text{ δηλ. οι πίνακες } T^{*k} \text{ και } T^k \text{ είναι} \\ &\quad \text{οι ανάστροφοι} \end{aligned}$$

Ορισμός: Ένας ευδομορφισμός $T: V^n \rightarrow V^n$ ενός Ευκλείδειου χώρου καλείται αυτοπροσχηματισμένος ή αυτοσυζυγής αν ο πίνακας του σε οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση είναι συμμετρικός. Δηλ. $\langle T u, v \rangle = \langle u, T v \rangle \Leftrightarrow T = T^*$

Π.χ. Βρείτε τον προσημασμένο του $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τον $T(x, y) = (x + 3y, 2x + y)$

Εδώ το $\mathbb{R}^2$ έχει το κανονικό εσωτερικό γινόμενο. Ας βρούμε τον πίνακα του T ως προς την κανονική βάση:

$$T(1, 0) = (1, 2)$$

$$T(0, 1) = (3, 1)$$

$T^k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ όχι συμμετρικός $\Rightarrow$ ο T δεν είναι αυτοπροσχηματισμένος

~ 1 ---
 Ο $T^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ θα έχει σαν πινάκω ως προς τη κανονική βάση τον αντιστροφή του $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Δηλ. τον $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Άρα ο T^* θα δίνεται (επειδή είμαστε στην κανονική βάση με το κανονικό εσωτερικό διτόμενο)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+y \end{pmatrix} \quad \text{Δηλ. } T^*(x,y) = (x+2y, 3x+y)$$

π.χ. Βρείτε τον ηχοσυστατικό του $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και τώρο $T(x, y, z) = (x - y + z, x + y, z - x)$

$$T^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ και } \langle T(x, y, z), (a, b, \delta) \rangle = \langle (x, y, z), T^*(a, b, \delta) \rangle$$

Βρίσκουμε τον πίνακα του T ως προς τη κανονική βάση

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 1, -1) \\ T(0, 1, 0) &= (-1, 1, 0) \\ T(0, 0, 1) &= (1, 0, 1) \end{aligned} \quad T_K^K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αυτός δεν είναι αλγεβρικός. Άρα $T^{*K}_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Συν. } T^*(a, b, \delta) \text{ θα δίνεται από } \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ \delta \end{pmatrix} \right)^t =$$

$$= \begin{pmatrix} a + b - \delta \\ -a + b \\ a + \delta \end{pmatrix}^t \quad T^*(a, b, \delta) = (a + b - \delta, -a + b, a + \delta)$$

Παράδειγμα: Έστω $T: V^M \rightarrow V^M$ ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου V . Το ερώτημα είναι ισοδύναμο:

- 1) $\exists T$ είναι μ -αγνιστός
- 2) $\exists T = F^2$ όπου F είναι αυτομορφισμός ενδομορφισμός
- 3) $\exists T = (T')^* T'$ για κάποιο ενδομορφισμό T'

Αποδ: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1)

[1) $\Rightarrow$ 2)] T είναι μ -αγνιστός, άρα $T = T^*$ (γιατί ο πίνακας του είναι αλγεβρικός)

Άρα υπάρχει ορθοκανονική βάση του $V = \langle v_1, \dots, v_M \rangle$ από ιδιοδιανύσματα με την ιδιότητα $T(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, M$ και $\lambda_i \geq 0$ διότι είναι μ -αγνιστός.

Θέτουμε τον $F: V \rightarrow V$ με τώρο $F(v_i) = \sqrt{\lambda_i} v_i$ και ο F είναι γραμμική απεικόνιση

Ο πίνακας της F στην βάση είναι διαγώνιος και
 ισχύει: $F = F^*$ (αυτοσυζυγής). Έχουμε ότι:
 $f(F(v_i)) = f(\sqrt{\lambda_i}(v_i)) = \sqrt{\lambda_i} F(v_i) = \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_i} v_i = \lambda_i v_i = T(v_i)$
 Άρα $T(v_i) = F^2(v_i) \quad \forall i=1, \dots, n$ οπότε $T = F^2$

2) = 3) Έχουμε ότι $T = F^2$ και $F = F^*$. Άρα $T = F^* F$.
 Οπ. εδω $T^* = F$

3) = 1) Έχουμε $T = (T')^* T'$ - ο δείχνουμε μ-αγνιστός. Δηλ.
 $\langle T(v), v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$

$\langle T(v), v \rangle = \langle (T')^* T'(v), v \rangle = \langle T'(v), T'(v) \rangle = \|T'(v)\|^2 \geq 0$
 Άρα ο T είναι μ-αγνιστός.

Συνέχεια φv) 8

8) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad a > 0, \det A > 0 \Rightarrow$ μ-αγνιστός
 ορισμένος

Άρα ν.ο δείχνουμε ότι οι ιδιοτιμές του είναι
 μ-αγνιστές $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \quad a > 0$ και $ac - b^2 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow ac \geq b^2 \quad a > 0 \quad \Rightarrow c \geq 0 \quad (+)$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$$

$$\lambda_1 = \frac{-(a+c) + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-(a+c) - \sqrt{\Delta}}{2c}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-(-(a+c))}{1} = a+c \geq 0 \text{ από } (+)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{(a+c)^2 - [(a+c)^2 - 4(ac-b^2)]}{4} = ac - b^2 \geq 0$$

Αγο το αλφαινο είναι ≥ 0 και το βινονο ≥ 0
Α μ-αγνιμο

9) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}$ $a \geq 0$ $ac - b^2 \geq 0$ Αλλα ο Α δεν είναι
 $\det A \geq 0$ μ-αγνιμο
οριμενος

Αγο να εχει μια αγνιμη ιδιοτιμη